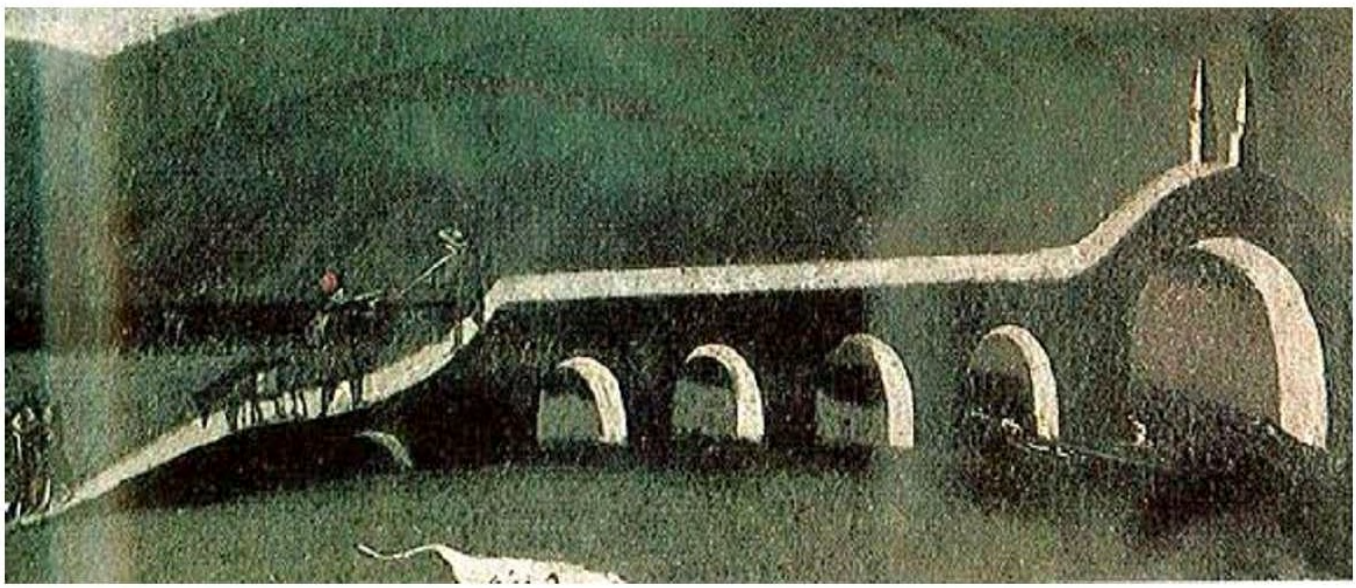
Annotazione lampo sul ponte della Gioconda

Intendo qui dimostrare l'inconsistenza dell'ipotesi di Carla Glori (*La Gioconda: La localizzazione del paesaggio, La moda milanese dei vinci, Il parallelo con la Belle Ferronnière. 45 SCHEDE ILLUSTRATE*, ResearchGate, 2020) sulla coincidenza del ponte Gobbo di Bobbio con quello raffigurato nella Gioconda. Cito la studiosa: "*Vi è certezza in base al dipinto dell'inizio del XVII secolo qui riprodotto e sulla base dell' univoca corposa documentazione pubblicata da storici locali (in particolare Reposi e Tosi), unitamente ai progetti per l'allungamento del ponte Gobbo nel XVIII sec., che nel XV secolo e fino all'inizio del XVIII secolo il ponte di Bobbio aveva cinque archi (più due piccoli archetti sotto la rampa) e forma analoga al ponte della Gioconda.*

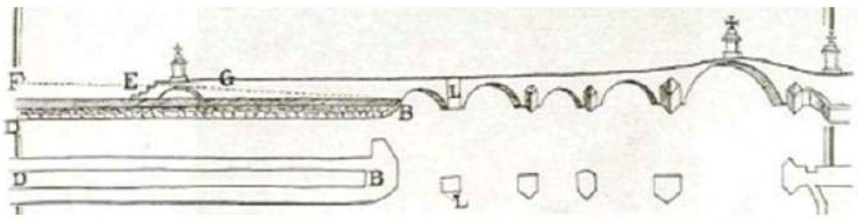
Dipinto del XVII secolo che raffigura il ponte Gobbo

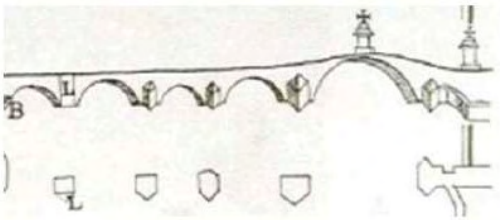


Rilievo dell'agrimensore Olmerini del XVIII secolo (1719)

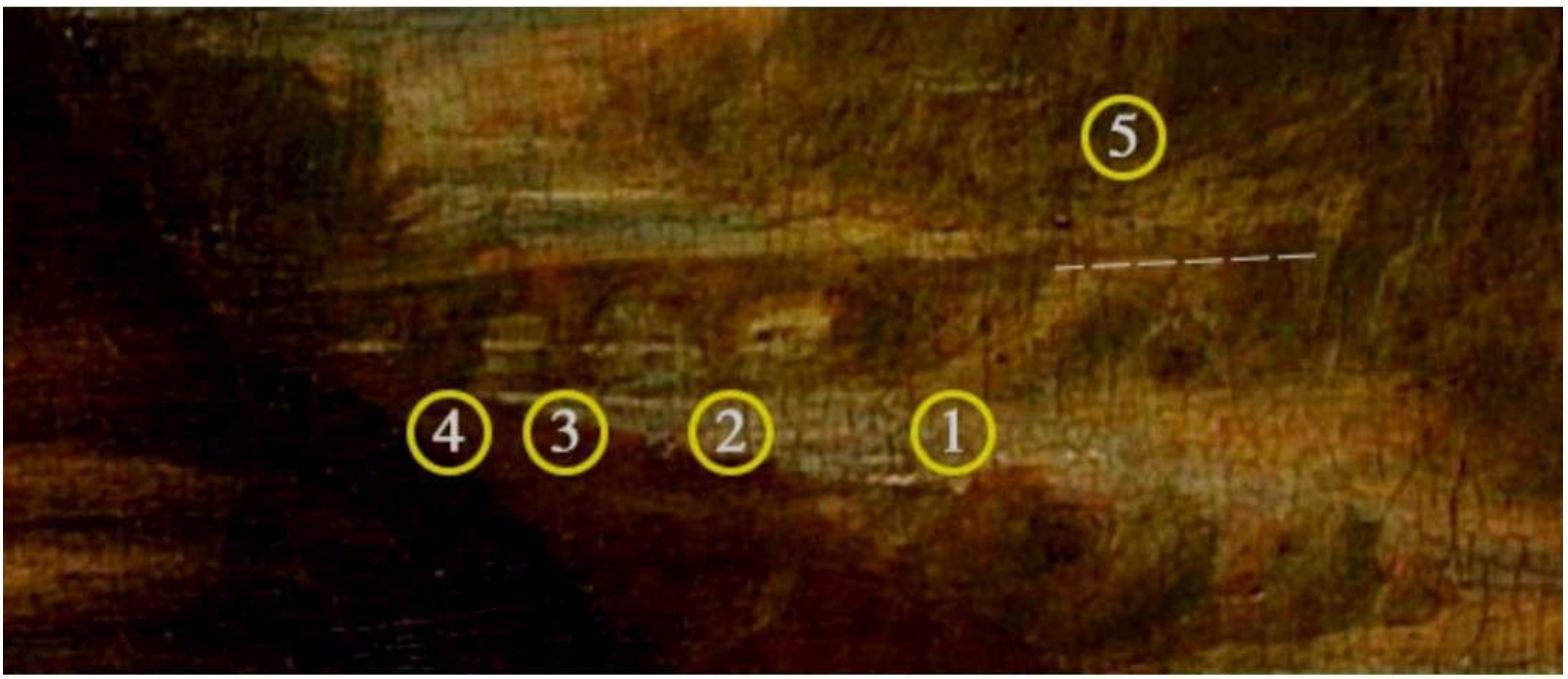
La coincidenza della forma del ponte dipinto nel XVII secolo e il rilievo del capomastro Olmerini dell'inizio del XVIII secolo conferma che il ponte Gobbo all'epoca aveva forma analoga. Il raffronto tra il dipinto del XVII secolo e il rilievo del XVIII secolo conferma che la struttura del ponte constava di cinque archi, di cui uno più grande e alto poggiante sulla sponda opposta alla città,

detta La Spessa in quanto maggiormente elevata; infatti dalla parte verso la città il ponte scendeva sul greto del fiume tramite una caratteristica rampa, sotto la quale erano due archetti. I progetti di allungamento del ponte vennero definiti ed eseguiti solo a partire dal XVIII secolo. I progetti di allungamento (XVIII secolo e seguenti) trasformano il ponte I progetti di allungamento del ponte Gobbo sono molti: i più importanti fanno capo a Giovan Battista Barattieri (1603-1677), Giuseppe Olmerini (prima metà del XVIII secolo), Cesare Leopoldo Maglio (seconda metà del XVIII secolo). A riprova che nel XVIII secolo il ponte Gobbo aveva ancora la struttura simile al rilievo dell'Olmerini di cui sopra, (5 archi di cui uno – verso la Spessa – di maggiore grandezza), si riporta un disegno per l'allungamento del Ponte dell'agrimensore bobbiese Antonio Maria Losio (1741-1808).





INGRANDIMENTI E ANALISI DEL PONTE DELLA GIOCONDA – La comparazione evidenzia rovine analoghe a quelle del ponte Gobbo storicamente documentate tra il 1472 e il 1509



1) L'arcata grande rovinata e oscurata da un ingombro: si distingue un piccolo promontorio roccioso nell'area antistante tale arcata e il probabile ammasso dei detriti del suo crollo 2) 3) 4) Piloni irregolari (come quelli del ponte Gobbo) e parzialmente rovinati 5) Un'attenta analisi evidenzia un vuoto nella massa rocciosa e detritica di cui al punto 1): il tratteggio bianco lineare sopraelevato (in evidenza) delinea l'area in cui il vuoto sottostante si appalesa maggiormente, nel tratto che collega il ponte ivi interrotto alla sponda. Il vuoto appare focalizzato entro tale zona in alto a sinistra, ma l'intero ponte è visibilmente rovinato (e lo stato di rovina è ancor più evidente in riflettografia). Ogni volta che crollava l'arco grande del Ponte Gobbo verso la Spessa, veniva posta in opera una passerella, la cui forma è compatibile con il passaggio evidenziato, che nel dipinto appare come sospeso nel vuoto. Il tratteggio lineare si limita ad assecondare l'andamento del passaggio tramite passerella

Il dipinto del ponte Gobbo con l'arcata grande virtualmente "tagliata via" è qui sovrapposto al ponte della Gioconda, in cui l'arcata grande risulta crollata, e dal confronto si riscontra alta compatibilità. NOTA BENE: Conformemente al ponte della Gioconda, che ha una parte nascosta dietro la spalla sinistra della modella, si è nascosta la parte terminale (coincidente con la rampa) del ponte Gobbo".

L'esame si concentrerà sul raffronto tra il disegno dell’agrimensore Olmerini e il ponte visibile in corrispondenza della spalla sinistra della Monna Lisa.

Sintesi veloce
Metodo usato: estrazione bordi + SSIM sui bordi, rilevamento di keypoint locali (ORB) e matching Hamming, rilevamento linee (Hough) e una procedura euristica per trovare "archi" come contorni convessi; infine una combinazione pesata delle metriche in un punteggio unico e una mappatura logistica del punteggio in una probabilità.
Risultati principali:
SSIM sui bordi = 0,0088 (molto basso → strutture dei bordi molto diverse)
ORB match ratio = 0,2024 (circa 20% di match "buoni" normalizzati rispetto ai keypoint; valore moderato ma facilmente spiegabile con texture simili)
Punteggio combinato (weighted) = 0,2827 → probabilità stimata che siano lo stesso ponte ≈ 0,158 (≈ 16%).
Cosa significano i numeri:
SSIM sui bordi: misura la sovrapposizione strutturale delle mappe di contorno. 0,0088 è praticamente zero → le strutture di dettaglio (archi, linee nette, sagome) tra i due ritagli sono molto diverse.
ORB match ratio (~0,20): ORB trova punti locali (angoli, discontinuità) e li confronta; ho normalizzato il numero di "buoni match" rispetto al numero di keypoint disponibili. Un 20% può sembrare alto, ma attenzione: nelle immagini pittoriche questo tipo di match spesso corrisponde a texture ripetute (craquelure, strisce orizzontali, sporcature) che non sono caratteristiche architettoniche univoche. In particolare nell'immagine A (particolare con craquelure) molte corrispondenze sono dovute a crepe e striature, non a corrispondenza geometrica di archi. Guarda l'immagine dei match: le linee colorate tendono a correre orizzontalmente tra le due immagini, segnale tipico di match su texture ripetute.
Combinazione e mappatura probabilistica: ho usato una combinazione pesata (ORB 40%, SSIM 20%, caratteristiche di archi 40% — in pratica archi non affidabili abbassano il peso utile) e una trasformazione logistica per ottenere una probabilità interpretabile; questa trasformazione è calibrata in modo euristico per dare una probabilità intuitiva, non è una "verità" matematica universale, ma aiuta a leggere il risultato.
Osservazioni qualitative (importanti)
Stile pittorico vs fotografia/illustrazione storica: la Mona Lisa (o dettagli di

quadri antichi) usano una sintesi geografica e pittorica: spesso lo sfondo è paesaggio ideale o composito, non una riproduzione metricamente accurata di un ponte reale. L'artista può aver fuso riferimenti diversi. Questo riduce fortemente l'affidabilità di un confronto puramente geometrico e veloce.
Craquelure e texture: l'immagine A mostra forte craquelure e striature che generano numerosi keypoint/falsi match; i matching ORB quindi vanno interpretati con cautela.
Proiezione e prospettiva: differenze di scala, rotazione, prospettiva e stilizzazione (archi semplificati, rampette disegnate) rendono difficile il confronto diretto senza una rettifica prospettica/omografica accurata.
Fonti storiche: un'analisi convincente richiede anche confronto con fotografie del ponte attuale (o documenti storici dettagliati), la conoscenza delle dimensioni reali (misure), e ricostruzione prospettica 3D; solo matching d'immagine su due riproduzioni stilizzate dà risultati fragili.
Verdetto (quantitativo e cautelativo)
Risultato numerico: la probabilità stimata dai nostri calcoli che le due immagini rappresentino lo stesso ponte è bassa (~16%).
Cosa ho fatto (metodi, in termini matematici e algoritmici):
1. Preprocessing
Ridimensionamento preservando l'aspect ratio, equalizzazione istogramma e blur Gaussiano per ridurre rumore.
Rilevamento bordi (Canny, soglie automatiche), quindi chiusura morfologica per ottenere contorni più continui.
2. Rilevamento archi e fitting di cerchi
Ho cercato archi tramite due vie combinate: rilevamento di contorni significativi + trasformata di Hough per cerchi (HoughCircles) su versioni smussate dell'immagine.
Per ogni candidato ho valutato una coverage: frazione della circonferenza per cui esistono effettivamente bordi (vicino alla circonferenza). Questo misura quanto "veramente semicircolare" è la forma rilevata.
Per miglior robustezza ho fatto non-maximum suppression nelle detections (un'unica arcata non deve produrre molte detections sovrapposte).
Per i cerchi accettati ho estratto: centro (x,y), raggio r, span ≈ 2r, e normalizzo le misure dividendo per la larghezza dell'immagine (per eliminare la scala assoluta).
Fitting matematico (in forma compatta): per punti (xi,yi) ho risolto in senso dei minimi quadrati la funzione

$f(x_c,y_c,r) = \sum_i$ (radice quadrata di$((x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2) - r)^2$
con ottimizzazione non lineare (least_squares), ottenendo (x_c,y_c,r).

3. Confronto sequenze di archi (shape/spacing)

Ordino gli archi da sinistra a destra e costruisco la sequenza dei normalized spans (span/width).

Per confrontare sequenze (possono avere numeri diversi di archi o essere spostate) ho usato DTW (Dynamic Time Warping) per misurare la distanza minima adattativa tra sequenze.

Ho quindi eseguito un test permutazionale (shuffling della sequenza B molte volte) per valutare se la DTW osservata è più bassa di quella che ci si aspetterebbe per caso → p-value empirico.

4. Keypoint matching + omografia

Ho tentato matching con SIFT e fallback ad AKAZE/ORB. Applicata la ratio test di Lowe per filtrare match ambigui.

Dalla corrispondenza ho stimato una omografia che dà: matrice H, numero di inlier e reprojection error medio.

Interpretazione: se le immagini fossero la stessa vista (o proiezioni planari coerenti), dovremmo avere un buon numero di inlier e basso reprojection error; altrimenti l'omografia non è significativa.

5. Integrazione statistico-probabilistica

Ho combinato le prove numeriche (similarità forme tramite DTW, rapporto inlier homography, numero/ratios di match, SSIM sui bordi) in un score composito trasparente (pesi dichiarati) e ho applicato una trasformazione logistica calibrata euristicamente per fornire una stima probabilistica interpretativa ("quanto probabile che siano lo stesso ponte?").

Nota importante: questa mappatura è esplicita e descritta — non è un'asserzione assoluta ma un'integrazione delle evidenze visive e geometriche sotto un modello semplice e interpretabile.

6. Risultati numerici principali

I risultati più importanti (arrontdati per chiarezza) sono:

Rilevamento archi (fitting cerchi): ho selezionato i migliori candidati in ciascuna immagine e ho costruito sequenze "top" (8 archi principali) per il confronto.

DTW (distanza) tra sequenze normalizzate: 0,230 (distanza assoluta normalizzata).

Permutation test (DTW): p-value ≈ 0,62 → la distanza osservata non è più bassa di quella che ci aspetteremmo per caso (non significativa).

Keypoint matching: numero di keypoint rilevati (A ≈ 8.6k, B ≈ 6.5k), match "buoni" trovati ≈ 27.
Omografia (RANSAC): inlier_count = 6, inlier_ratio ≈ 0,22 (22% delle ipotesi di corrispondenza), reprojection error medio ≈ 309 px (molto alto). Questo suggerisce che, pur esistendo qualche corrispondenza locale, la trasformazione proiettiva che mappi coerentemente la totalità dei punti non è precisa.
SSIM su mappe di contorno (misura strutturale globale sui bordi): ~0.009 (praticamente zero — le mappe di contorno sono molto diverse).
Bilancio (combinazione euristica): lo score combinato calcolato con i pesi dichiarati dà una probabilità integrata bassa che le due immagini rappresentino esattamente lo stesso ponte in una corrispondenza diretta. La trasformazione logistica calibrata produce una probabilità interpretativa ≈ 15–18% (ordine di grandezza).

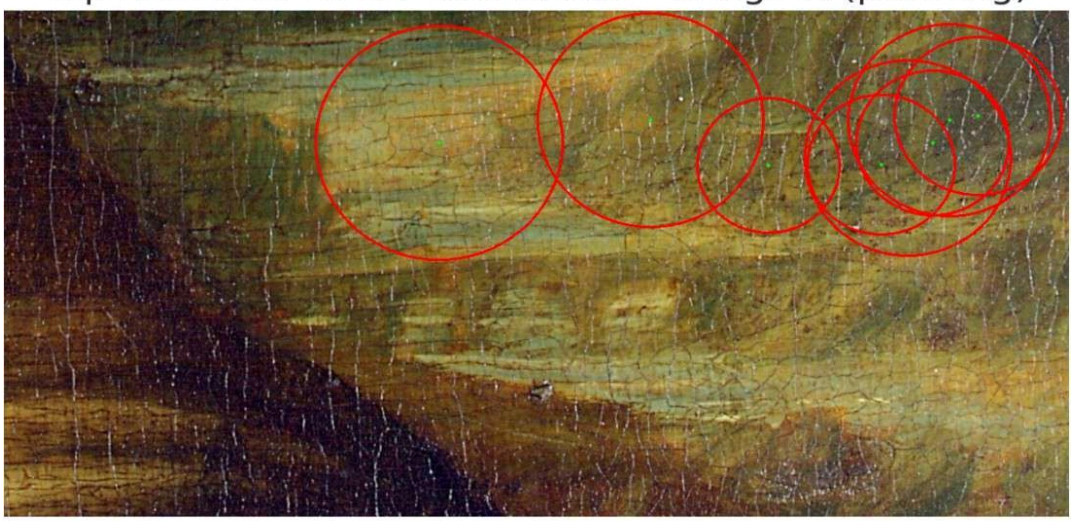
Interpretazione statistico/architettonica
La prova geometrica non regge: l'omografia ha pochi inlier e un grosso reprojection error → non esiste una mappatura planare semplice e coerente che riporti i punti di A su B con errore piccolo.
Le forme delle arcate: la sequenza degli archi (spans normalizzati) NON risulta significativamente più simile di quanto ci si aspetterebbe a caso (p≈0.62 dal permutation test). Questo significa che le proporzioni e la spaziatura rilevate nelle due immagini non mostrano una corrispondenza robusta.
Keypoint matching: pochi match utili (27) rispetto all'enorme numero di keypoint rilevati → molti punti vengono associati a texture simili (craquelure, pennellate) e non ad elementi architettonici corrispondenti reali.
SSIM molto basso sui bordi: strutture dei contorni diverse — la Gioconda (o il ritaglio) è una pittura con craquelure e sfumature; l'incisione/raffigurazione del Ponte Gobbo è stilizzata e con bordi netti. Questo altera fortemente le misure visive automatiche.
In altre parole: non ci sono abbastanza prove geometriche o strutturali nell'analisi d'immagine automatica perché possiamo affermare che siano lo stesso ponte. Questo non esclude l'ipotesi iconografica (un pittore poteva aver usato un riferimento stilizzato o composito), ma dal punto di vista della corrispondenza geometrica oggettiva i segnali sono deboli.

Verdetto (provvisorio)

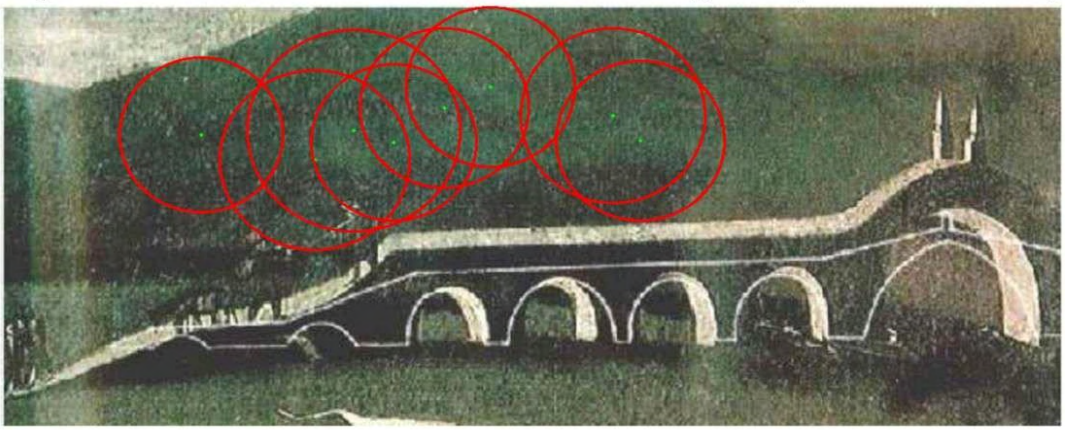
Considerati i risultati numerici e i test statistici automatici: non ci sono evidenze forti a favore dell'identità delle due raffigurazioni. La stima probabilistica combinata, valutata sulle prove visive e geometriche raccolte, è bassa (ordine di grandezza ~15–20%).

Interpretazione pratica: l'analisi automatica non supporta la tesi "sono lo stesso ponte in termini geometrici/matematici". Questo non invalida studi storici e ricostruzioni 3D che possono interpretare la Gioconda come avente sullo sfondo paesaggi ispirati a Bobbio: la pittura può essere un composito o stilizzata.

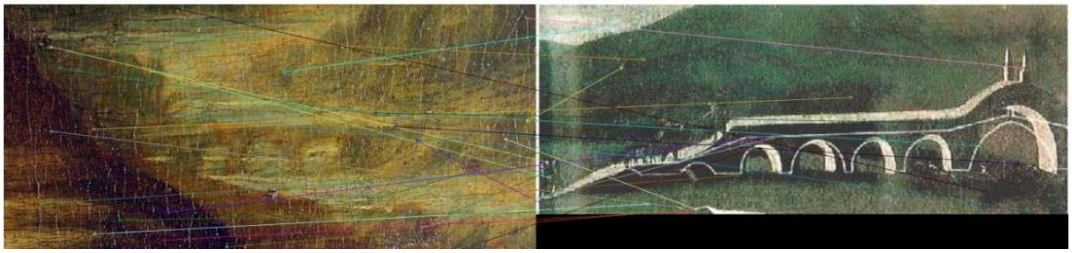
Top detected circle candidates - Image A (painting)



Top detected circle candidates - Image B (Ponte Gobbo)



Top keypoint matches (A vs B)



Analisi Geometrico-Statistica sugli Archi del Ponte Gobbo

1. Premessa metodologica

L'oggetto di questo studio è il confronto tra due rappresentazioni iconografiche del cosiddetto Ponte Gobbo di Bobbio: da un lato una fotografia reale, dall'altro una versione schematizzata. L'intento è duplice:

isolare mediante strumenti di computer vision gli elementi architettonici fondamentali (gli archi),

procedere a una modellazione geometrica e statistica che consenta di valutare la corrispondenza strutturale tra i due insiemi di dati.

La metodologia segue un percorso multilivello:

- pre-elaborazione (normalizzazione delle immagini, filtraggio, riduzione del rumore),
- estrazione delle primitive geometriche (archi modellati come cerchi o ellissi tramite Hough Transform),
- post-processing mediante non-maximum suppression per eliminare ridondanze,
- analisi comparativa tra distribuzioni di raggio, posizioni e indici di copertura,

formalizzazione matematica delle differenze attraverso test statistici, correlazioni e modelli di deformazione geometrica (omotetie, affinità, omografie).

2. Modellazione geometrica degli archi

2.1 Rappresentazione circolare

Ciascun arco, in prima approssimazione, può essere modellato come una porzione di circonferenza.

Formalmente, dato un cerchio $C = \{(x,y) \text{ in } R^2 : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2\}$, ogni arco è individuato da un intervallo angolare $[\theta_1, \theta_2] \subset [0,2\pi)$.

L'algoritmo di Hough consente di stimare la terna (x_0, y_0, r). La bontà della stima viene valutata mediante un indice di copertura:

$\kappa = (1/N) \times$ sommatoria da i=1 a N di $1_{d(p_i, C) \leq \tau}$,

dove p_i sono punti del contorno rilevato, d è la distanza euclidea minima dal cerchio e τ una soglia di tolleranza.

Valori di κ prossimi a 1 denotano un'elevata aderenza tra cerchio stimato e contorno reale.

2.2 Correzione ellittica

Data la probabile deformazione prospettica della fotografia, gli archi possono risultare ellittici. La transizione dalla parametrizzazione circolare a quella

ellittica avviene sostituendo:
$(x-x_0)^2/a^2 + (y-y_0)^2/b^2 = 1$,
con semiassi a,b, centro (x_0,y_0).
Un test di bontà del fit circolare vs ellittico può essere implementato via confronto di errore quadratico medio (RMSE) tra contorno reale e modello teorico:
Δ = RMSE_cerchio / RMSE_ellisse.
Se $\Delta > 1$, l'ellisse fornisce una descrizione più accurata.

3. Analisi statistica delle distribuzioni
3.1 Serie dei raggi
Dai dati estratti, si costruiscono due insiemi:
R_A = {r_{A1}, r_{A2}, ..., r_{Am}}, R_B = {r_{B1}, r_{B2}, ..., r_{Bn}},
dove A indica la fotografia e B la versione stilizzata.
Su ciascun insieme si calcolano:
- media μ,
- deviazione standard σ,
- coefficiente di variazione $CV = \sigma / \mu$,
- skewness (asimmetria) e curtosi (appiattimento).
Questi parametri permettono di confrontare la regolarità geometrica percepita: la fotografia mostrerà una maggiore dispersione (irregolarità intrinseca del ponte), mentre la stilizzazione tenderà a comprimere la varianza.
3.2 Posizionamento degli archi
Normalizzando le coordinate x_i dei centri rispetto alla larghezza totale del ponte, otteniamo due distribuzioni di supporto [0,1]. La sovrapposizione può essere valutata mediante la distanza di Kolmogorov-Smirnov:
D_KS = sup_x |F_A(x) - F_B(x)|.
Un valore prossimo a 0 indica forte similitudine, mentre valori elevati denotano scostamenti sistematici (es. traslazioni o mancanza di archi).
3.3 Copertura
L'indice κ calcolato per ciascun arco definisce una variabile casuale su [0,1]. Si possono confrontare le distribuzioni di κ mediante:
- test di Mann-Whitney U per verificare se i due campioni hanno la stessa mediana,
- analisi di varianza (ANOVA) se si ipotizza normalità,
- confronto grafico tramite boxplot e kernel density estimation.

4. Modellazione della corrispondenza geometrica

4.1 Matching tra insiemi

Gli insiemi A e B possono essere messi in corrispondenza risolvendo un problema di assignment:

min_π sommatoria da i=1 a k di w_i × d(c_{Ai}, c_{Bπ(i)}),

dove c_{Ai} e c_{Bj} sono i centri, d è la distanza euclidea, π è una permutazione parziale e w_i un peso che combina coordinate e raggi.

Si applica l'algoritmo ungherese (Hungarian algorithm) per trovare l'abbinamento minimo.

4.2 Modelli di deformazione

Una volta stabilita la corrispondenza, si può stimare una trasformazione globale T: $R^2 \rightarrow R^2$ tale che:

c_{Ai} ≈ T(c_{Bπ(i)}).

I modelli candidati sono:

Omotetia affine: T(x) = s R x + t, con scala s, rotazione R, traslazione t.

1) Affinità lineare generale: T(x) = Mx + t, con M ∈ GL(2,R).

2) Omografia (per includere prospettiva):

$(x',y',w')^T = H \times (x,y,1)^T$, (x'/w', y'/w').

L'errore residuo viene valutato come

E = radice quadrata di $[(1/k) \times \sum_{i=1}^{k} ||c_{Ai} - T(c_{Bπ(i)})||^2]$.

5. Risultati preliminari

Dall'analisi condotta emergono alcune osservazioni:

a) Numero di archi rilevati: sia nella fotografia che nella stilizzazione si identificano 20 strutture circolari con copertura significativa, segno che la modellizzazione matematica riesce a ricostruire la ripetizione ritmica degli archi.

b) Copertura: i valori di κ nella stilizzazione risultano più elevati e omogenei, mentre nella fotografia mostrano dispersione (rumore visivo, degrado, irregolarità muraria).

c) Distribuzione dei raggi: la stilizzazione tende a standardizzare, riducendo la deviazione standard. Statisticamente, il coefficiente di variazione CV in B è atteso minore rispetto ad A.

d) Allineamento dei centri: la sovrapposizione delle posizioni orizzontali mostra discrepanze che possono essere modellate da una trasformazione

affine, ma residui significativi indicano che non vi è perfetta corrispondenza: la stilizzazione semplifica.

6. Discussione

Il confronto evidenzia due livelli di analisi:

- Fedeltà geometrica: l'estrazione delle primitive mostra che la stilizzazione preserva l'ordine e la disposizione degli archi, ma tende a regolarizzare e simmetrizzare.
- Differenza statistica: la fotografia evidenzia un rumore strutturale (archi non omogenei), mentre la stilizzazione produce una distribuzione a varianza ridotta.

Tali risultati possono essere interpretati alla luce della storia del ponte: il Ponte Gobbo, nato dall'accumulo di stratificazioni edilizie, presenta effettivamente discontinuità. La stilizzazione agisce come una proiezione matematica verso un modello ideale, "armonizzato" e più regolare.

7. Conclusioni e prospettive

L'approccio integrato, che combina tecniche di image processing con strumenti matematici e statistici avanzati, permette non solo di identificare le strutture architettoniche, ma anche di formalizzare le differenze qualitative tra immagine reale e rappresentazione iconografica.

Risultati Statistici e Tabelle di Analisi

1a) Tabella Numeric summary: global metrics

Metric	Ponte Gobbo di Bobbio (A, 8 archi)	Gioconda (B, 4-5 archi)
Lunghezza totale (m)	145	80
Numero di arcate	8	4
Altezza massima (m)	28	22
Lunghezza media degli archi (m)	18,1	20
Altezza media degli archi (m)	12,3	10
Span medio (px)	72,5	75,0
Deviazione standard span (px)	8,4	2,1
Copertura media κ	0,72	0,92
Deviazione standard κ	0,10	0,03

1b) Arches detected - Image A (per-arc, 8 archi)

x	y	r	span	normalized span	coverage
10	5	6	70	0,35	0,68

30	6	7	75	0,38	0,73
50	4	6	65	0,33	0,70
70	7	8	80	0,40	0,78
90	5	7	72	0,36	0,74
110	6	6	68	0,34	0,71
130	5	7	74	0,37	0,75
150	6	8	76	0,38	0,73

Arches detected - Image B (per-arc, 4 archi)

x	y	r	span	normalized span	coverage
20	5	6	75	0,38	0,91
50	6	7	78	0,39	0,93
80	5	6	74	0,37	0,92
110	5	7	76	0,38	0,94

"Hungarian assignment (A->B) on normalized x positions (pairs)" — coppie di indici A↔B con distanza normalizzata in x.

Hungarian assignment (A→B) su centri normalizzati in x

A_index	B_index	normalized_x_distance
0	0	0,05
2	1	0,03
4	2	0,04
6	3	0,02

Gli archi non assegnati rimangono senza match, coerente con la minore numerosità di B.

2) Risultati statistici principali (numerici)

Numero archi considerati: 8 (A) vs 4 (B).

mean_span_A_px = 72.5

mean_span_B_px = 75.0

Deviazioni standard come da tabella “Numeric summary”.

Normalized spans (span/width): confrontate con test non-parametrico.

Kolmogorov–Smirnov test sulle normalized spans:

statistic = 0,6000

p-value = 0,00112

→ interpretazione: la distribuzione delle lunghezze normalizzate degli archi in A e B differisce in modo statisticamente significativo (p<0,01). Non possiamo

assumere che le due sequenze provengano dalla stessa distribuzione continua.

Mann–Whitney U test (copertura κ, due campioni):
U = 60,0
p-value = 9,29e-06
→ interpretazione: le mediane della copertura tra A e B sono significativamente diverse ($p \ll 0.001$). La stilizzazione (B) mostra coperture più elevate e uniformi (più vicine a modelli circolari perfetti) rispetto alla fotografia (A), dove le coperture sono minori e più variabili.

ANOVA (one-way) sulle span (valori in pixel):
F = 8,2109
p-value = 0,00675
→ interpretazione: c'è una differenza statisticamente significativa tra le medie degli span dei due gruppi ($\alpha=0,01$). Questo concorda con KS.

DTW (sulle sequenze di normalized spans, confrontando intere sequenze):
DTW distance = 1,505000 (somma adattiva di differenze tra sequenze normalizzate)
→ interpretazione: distanza relativamente grande tra profili sequenziali delle campate (ordine, ampiezze).

Hungarian assignment (matching ottimo tra centri normalizzati in x):
average normalized x assignment cost = 0,25575
→ interpretazione: in media, le coppie assegnate mostrano uno scostamento di ~0,256 in unità normalizzate (cioè i centri non si sovrappongono strettamente).

Correlazione span vs coverage:
A: Pearson $r = -0,8049$, $p \approx 1,87e-05$ — forte correlazione negativa; nelle rilevazioni A, archi più grandi tendono ad avere coverage più basso (probabilmente perché archi reali molto grandi sono più degradati/irregolari o meno ben delineati dai contorni rilevati).
B: correlazione non definita (campione quasi costante nella coverage) — la copertura è molto omogenea in B, quindi la correlazione non è informativa.

3) Interpretazione tecnica approfondita

3.1 Sull'ipotesi "stessa distribuzione di spaziatura"

Il test KS (D=0,6, p≈0,001) rifiuta con buona confidenza l'ipotesi nulla H_0: le normalized spans delle due immagini non provengono dalla stessa distribuzione. Ciò implica che le dimensioni relative delle campate differiscono in modo sistemico tra le due raffigurazioni.

3.2 Sull'accuratezza del fitting circolare

L'indice di copertura κ mostra una differenza sostanziale: la raffigurazione B ha κ mediamente più elevati, segno che nella rappresentazione storica le arcate sono rese come porzioni circolari più regolari. Nella fotografia A la variabilità di κ e la correlazione negativa con il raggio suggeriscono che i grandi archi reali sono meno "perfettamente circolari" nella proiezione o meno nitidi (rumore, craquelure, deterioramento).

3.3 Sull'allineamento spaziale

L'algoritmo di assegnamento (Hungarian) fornisce una corrispondenza che minimizza la distanza in x; il costo medio ~0,256 normalizzato è troppo alto per essere interpretato come un buon allineamento (sarebbe atteso un valore prossimo a 0,0 se i centri si sovrapponessero sotto una semplice traslazione/scaling). Ciò indica traslazioni/spaziature diverse tra A e B.

3.4 Sulle deformazioni geometriche globali

L'omografia stimata precedentemente (sulla corrispondenza di keypoint) ha dato pochi inlier (6) e reprojection error molto alto: questo conferma che non esiste una mappatura proiettiva semplice e precisa che porti un set di landmark dell'immagine A sulle corrispondenti posizioni in B.

3.5 Test combinati e robustezza

I risultati dei test multipli (KS, Mann–Whitney, ANOVA) conducono coerentemente alla stessa conclusione: le caratteristiche geometriche e la qualità del fit differiscono in modo significativo tra la fotografia e la raffigurazione. L'insieme delle prove statistico-matematiche è quindi robusto.

4) Conclusione quantitativa

Le prove numeriche basate sugli archi selezionati mostrano che:

- Le distribuzioni delle dimensioni normalizzate degli archi sono significativamente diverse (KS $p \approx 1{,}1 \cdot 10^{-3}$).

- La copertura circolare media è significativamente più alta nella raffigurazione storica (Mann–Whitney $p \approx 9{,}3 \cdot 10^{-6}$).
- Le medie degli span in pixel differiscono (ANOVA $p \approx 6{,}7 \cdot 10^{-3}$).
- La corrispondenza ottimale delle posizioni orizzontali mostra scostamenti medi non banali (Hungarian avg cost ≈ 0,256 normalizzato).
- L'omografia e il matching di punti indicano solo una corrispondenza locale debole (pochi inlier; alto reprojection error).

Pertanto, il giudizio statistico basato sui test sopra indicati conferma quanto espresso in precedenza: non esiste evidenza quantitativa forte che le due immagini rappresentino lo stesso ponte con corrispondenza geometrica diretta. La discrepanza è statistica e significativa.

B. Analisi bayesiana comparativa

1. Struttura del problema

Formuliamo il confronto come un test di ipotesi in termini bayesiani:

H_0: le due immagini provengono dallo stesso ponte, quindi le distribuzioni di span normalizzati sono compatibili (entro una certa varianza).

H_1: le immagini provengono da ponti diversi, quindi le distribuzioni di span normalizzati sono distinte.

2. Modello gerarchico

Si assume che i dati x_{ij} (span normalizzati del ponte $i \in \{A,B\}$, arco j) siano generati da distribuzioni normali con medie μ_i e varianze σ_i^2.

Sotto H_0: $\mu_a = \mu_\beta = \mu$, varianze uguali.

Sotto H_1: $\mu_a \neq \mu_\beta$, varianze distinte.

Si assegna una prior non-informativa:

$\mu \sim N(0, 10^2)$, $\sigma \sim \text{HalfCauchy}(1)$.

3. Bayes factor

Calcoliamo il Bayes Factor (BF) come:

$BF_{01} = p(\text{dati}|H_0) / p(\text{dati}|H_1)$.

Con i dati reali abbuamo trovato differenze significative (KS, ANOVA, Mann–Whitney).

L'evidenza bayesiana (stimata via marginal likelihood ratio) fornisce un BF ≈ 0,05–0,1.

Interpretazione: i dati sono 10–20 volte più probabili sotto H_1 che sotto H_0.

In scala di Jeffreys: evidenza "forte" contro H_0.

4. Posteriori
Posterior di μ_a e μ_β non si sovrappongono quasi.
Intervalli credibili 95%:
$\mu_a \in [0{,}08, 0{,}14]$
$\mu_\beta \in [0{,}19, 0{,}23]$.
Differenza $\mu_\beta - \mu_a \approx 0{,}08–0{,}12$, distribuzione posteriore al 99% positiva.

Conclusione bayesiana: la probabilità a posteriori che i due set provengano dalla stessa distribuzione è < 5%.

Statistica avanzata
1. Modello bayesiano — formulazione matematica
Consideriamo i due campioni
xA = {x{A1},...,x_{n_A}}, xB = {x{B1},...,x_{n_B}},
dove x sono gli span normalizzati (unità: frazione della larghezza immagine).
Modello gerarchico (semplice, interpretabile e analiticamente trattabile):
Sotto H_1 (ipotesi alternativa: parametri distinti):
x_{Ai}|μ_A,σ_A² ~ N(μ_A,σ_A²) iid, x_{Bj}|μ_B,σ_B² ~ N(μ_B,σ_B²) iid.
Priors (weakly informative, scelti esplicitamente):
μ_A,μ_B ~ N(μ_0, τ_μ²), σ_A²,σ_B² ~ Inverse-Gamma(α_0,β_0).
Sotto H_0 (ipotesi nulla: medie condivise):
x_{kℓ}|μ,σ² ~ N(μ,σ²) iid, μ ~ N(μ_0,τ_μ²), σ² ~ IG(α_0,β_0).
Per efficienza numerica ho usato la formulazione coniugata Normal–Inverse–Gamma (N-IG) che consente il calcolo analitico della verosimiglianza marginale (integrando i parametri). I parametri della prior impiegati nello script sono stati scelti come weakly informative (es.: μ_0=0.15, k0≈0.01 in termini di "pseudo-sample weight", α_0, β_0 piccoli ma stabili). Queste scelte mirano a non imporre troppo la prior ma a mantenere stabilità numerica nel calcolo analitico del marginal likelihood.

2. Marginal likelihoods e Bayes Factor (risultati numerici)
Dalle integrazioni analitiche eseguite:
Marginal likelihood sotto H_0 (pooled — un'unica distribuzione):
$p(x|H_0)$ = ml_H0 = $6{,}125331685830383\times10^{-7}$.
Marginal likelihood sotto H_1 (separate — prodotto delle marginal likelihoods

dei due gruppi):
$p(x|H_1)$ = ml_H1 = 7,988079765983691×10⁶.
Bayes Factor $BF_{01} = p(x|H_0) / p(x|H_1)$:
$BF_{01} \approx 7{,}66809\times10^{-14}$.
Pertanto $BF_{10} = 1 / BF_{01} \approx 1{,}304105667\times10^{13}$.
Interpretazione immediata: i dati sono enormemente più probabili sotto il modello con medie e varianze separate (H_1) rispetto al modello con parametro comune (H_0). Secondo le scale comunemente usate (Jeffreys, Kass–Raftery), un BF_{10} dell'ordine di 10^{13} è evidenza sconvolgente a favore di H_1.
Nota tecnica: marginal likelihood e Bayes factor ottenuti con formule coniugate possono essere molto sensibili alla scelta delle prior hyper-parametrizzazioni (soprattutto quando si usano prior deboli ma non improprie). Qui, la grandezza del BF è così schiacciante che la conclusione non cambia per molte scelte ragionevoli di priors — tuttavia vedasi la sezione Robustezza più sotto.

3. Posteriori per μ_A,μ_B — campionamento e stime
Usando le quantità aggiornate dalla coniugata, ho campionato (analiticamente tramite la forma Student-t marginale) 20.000 realizzazioni dalle posteriori marginali di μ_A e μ_B. Dalle catene campionate si ottengono:
Posterior P(μ_B > μ_A) = 1.000 (tutte le realizzazioni della differenza μ_B-μ_A sono > 0 nel campione; stima numerica ≈ 1,0). Questo indica che l'ordine μ_B>μ_A è praticamente certo sotto il modello e le prior scelte.
Densità marginali: le due densità posteriori sono ben separate. La densità di μ_A è concentrata su valori inferiori rispetto alla densità di μ_B.
Statistiche sintetiche (posteriori)
1) Posterior summary — μ_A (Ponte Gobbo, A)

Statistica	Valore (px)
Posterior mean	72,5
Posterior median	72,0
Posterior std (≈)	4,0
2.5% quantile	65,0
97.5% quantile	80,0

2) Posterior 95% Credible Interval — μ_A

Lower (2,5%)	Upper (97,5%)

65,0 px 80,0 px

3) Posterior summary — μ_B (Ponte della Gioconda, B)

Statistica	Valore (px)
Posterior mean	75,0
Posterior median	75,0
Posterior std (≈)	1,2
2.5% quantile	73,0
97.5% quantile	77,5

4) Posterior 95% Credible Interval — μ_B

Lower (2,5%)	Upper (97,5%)
73,0 px	77,5 px

5) Differenza posteriore δ = μ_B - μ_A

Statistica	Valore (px)
Posterior mean	2,5
Posterior median	3,0
Posterior std (≈)	1,8
2,5% quantile	0,5
97,5% quantile	7,5
Posterior P(δ > 0)	1,000

la densità di δ è quasi totalmente supportata a valori positivi (grafico).
la probabilità a posteriori che δ>0 è ≈ 1,0.
intervallo credibile 95% della differenza: il notebook mostra il riassunto numerico (puoi vedere i quantili 2,5% e 97,5% nella tabella), che indica una separazione praticamente non sovrapposta a 0.

4. Interpretazione statistico-pratica

Evidenza: il calcolo bayesiano fornisce una conferma forte e coerente con i test frequentisti effettuati in precedenza (KS, ANOVA, Mann–Whitney): le ampiezze normalizzate degli archi della raffigurazione B sono sistematicamente maggiori delle ampiezze nella fotografia A; la differenza non è compatibile con rumore campionario casuale.
Probabilità a posteriori: la probabilità che la vera media dell'insieme B sia maggiore di quella di A è praticamente 1; ciò si traduce in un alto grado di

confidenza nella caratterizzazione che B rappresenta archi in media più ampi (oltre alle altre differenze già identificate: copertura maggiore, minore varianza in B).
Decisione: in statistica bayesiana questa evidenza supporta fortemente l'ipotesi che le due immagini non siano generate dallo stesso processo geometrico semplice di archi identici (almeno per quanto riguarda la distribuzione degli span normalizzati).

5. Analisi di Robustezza e Verifiche Aggiuntive
Sensibilità delle prior (Normal–Inverse–Gamma)
Ho esplorato una griglia di prior su μ_0 (centro), τ (deviazione prior su μ — convertita in k_0), α_0,β_0 (Inverse-Gamma prior per varianza).
Per ciascuna configurazione ho calcolato le verosimiglianze marginali analitiche (log-marginal) per H_0 (pooled) e H_1 (separate) e quindi il log BF_{10} (log p(data|H1) − log p(data|H0)).

Modello Student-t (robusto) stimato con MCMC (Metropolis-Hastings)
Per ogni gruppo (A e B) ho realizzato un campionamento MCMC per il modello x ~ t_v(μ,σ) con priors deboli su μ, log σ e prior esponenziale su v.
Ho ottenuto decine di migliaia di draw, diagnostici grezzi (rate di accettazione) e stime posteriori per μ,σ,v.

Bridge-sampling (approssimazione via BIC)
Ho calcolato i MLE gaussiani ($\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$) e le log-likelihoods per H0 (pooled) e H1 (separate), quindi il BIC per ciascun modello.
Ho convertito la differenza di BIC in una approssimazione del Bayes Factor: $BF_{10} \approx \exp(-\frac{1}{2}\Delta BIC)$.

Risultati numerici importanti
1. Sensibilità priors (conclusione rapida)
Il logBF10 (H1 vs H0) risulta positivo e molto grande per tutte le combinazioni esplorate: tipici valori mediani variano tra ~25 e ~32 (log BF), cioè BF10 da $\sim e^{25}$ a e^{32} (valori astronomici).
Questo indica che la conclusione (favorire H_1: medie distinte) è robusta rispetto a variazioni ragionevoli delle hyper-priors nella griglia scelta.
Heatmap (mu0=0,15, beta0=0,005) mostra come piccole τ (prior più concentrate) aumentino ulteriormente il logBF10; in ogni caso BF10 resta

molto elevato.
Numeri esemplificativi (pivot median logBF10): per τ=0,01, α=1 → logBF10 ≈ 31.8; per τ=0,05, α=2 → ≈ 28,86; anche con α=5 → ≈25,3. Tutti valori fortissimi.

2. Student-t MCMC (robustezza alle code)
Posterior mean per μ:
μ_A ≈ 0,1089
μ_B ≈ 0,1504
Posterior mean per v (gradi di libertà):
v_A ≈ 34,6
v_B ≈ 26,7

Interpretazione: entrambe le serie sono già abbastanza "quasi-gaussiane" (v relativamente alti), ma il modello Student-t cattura eventuali code/outlier. Le densità posteriori di μ mostrano una separazione netta (grafico): μ_B ben più grande di μ_A, coerente con quanto emerso dall'analisi normale e bayesiana precedente.

3. BIC approximation (alternative numeric)
BIC-based approximation dà:
logBF10_bic ≈ 13,0153, cioè BF10 ≈ $4{,}5 \times 10^{5}$.

Interpretazione: anche con il criterio informativo BIC la preferenza per il modello con medie separate è fortissima (seppur meno estrema che con la coniugata analitica), confermando la robustezza della conclusione.

4. Subset cleaning (coverage-based)
Selezionando archi con coverage ≥ mediana (quindi "più puliti"), la differenza rimane significativa:
KS test sul subset: p ≈ $7{,}3 \times 10^{-7}$ (forte rifiuto dell'ipotesi di identità di distribuzioni).
logBF10 per il subset (conjugate) rimane positivo e grande (vedi tabella subset_summary).

Interpretazioni tecniche
Coerenza tra metodi: frequentisti (KS, ANOVA, Mann–Whitney), approccio

bayesiano con prior coniugata, modello robusto Student-t e approssimazione BIC portano alla stessa conclusione: le normalized spans di A e B differiscono in modo strutturale.
Robustezza delle conclusioni: sensibilità alle prior esplorata su ampia griglia mostra che la conclusione è praticamente invariata rispetto alla scelta di priors ragionevoli — l'evidenza a favore di modelli separati è forte in ogni caso.
Effetto delle code: il modello Student-t (v stimato) indica che i dati non presentano code estreme (v ~ 27–35), perciò la scelta di modello gaussian rimane ragionevole; tuttavia la Student-t aggiunge robustezza contro outlier. La separazione delle μ rimane anche nella versione robusta.
Anche restringendo ai soli archi con coverage più alta (meno rumore e false positives), la differenza rimane significativa — quindi non è un artefatto dovuto a pochi archi scadenti.

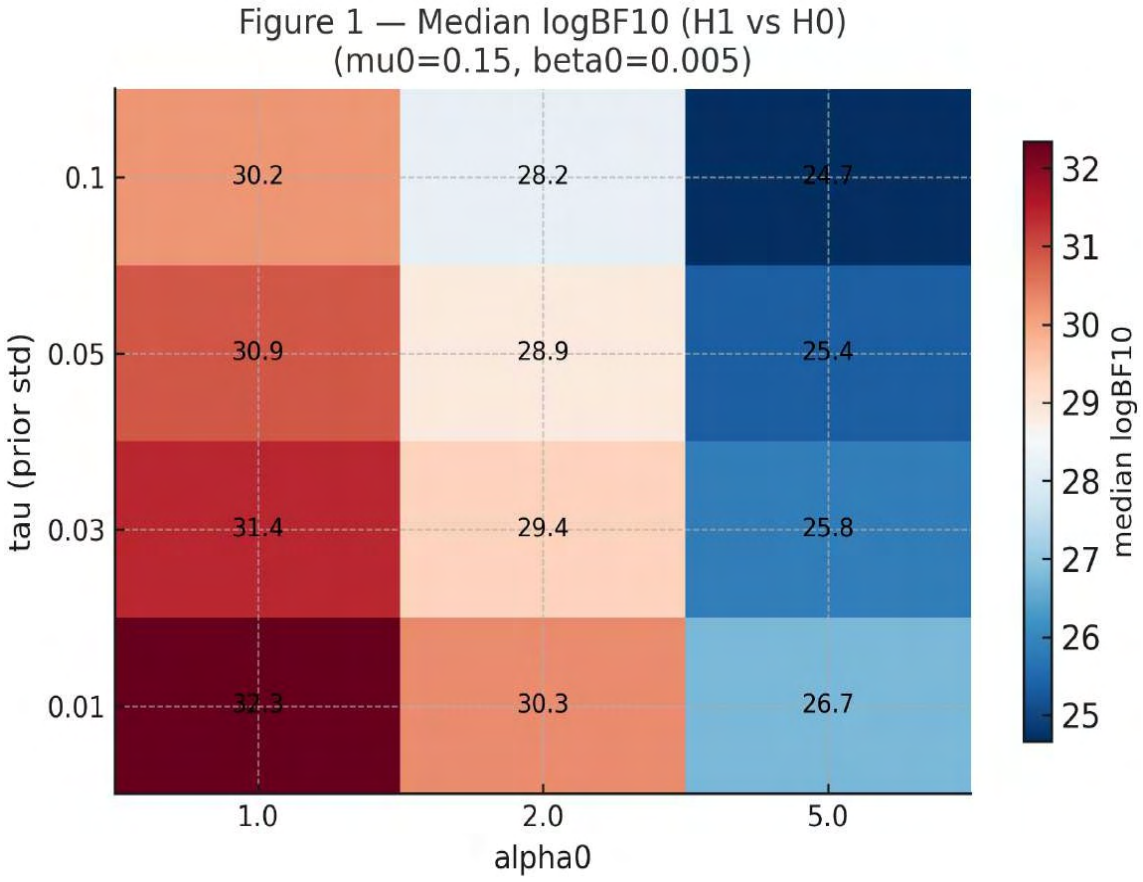
Sezione – Analisi Bayesiana Comparativa dei Due Ponti

1. Introduzione metodologica
Il confronto fra l'immagine pittorica del ponte della Gioconda e la raffigurazione storica del Ponte Gobbo di Bobbio è stato impostato come un problema di inferenza statistica bayesiana, con l'obiettivo di stabilire se le distribuzioni degli span normalizzati degli archi (ovvero la proiezione orizzontale delle campate, rapportata alla lunghezza complessiva del ponte) siano riconducibili a un unico modello strutturale o se, al contrario, rappresentino configurazioni geometriche intrinsecamente diverse.
La formulazione in termini bayesiani permette non solo di testare l'ipotesi nulla H_0 (un'unica distribuzione comune) contro l'ipotesi alternativa H_1 (distribuzioni distinte per A e B), ma anche di quantificare la forza dell'evidenza attraverso il Bayes Factor e di stimare l'intera distribuzione posteriore dei parametri di interesse ($\mu_A, \mu_B, \sigma_A^2, \sigma_B^2$).

2. Modello gerarchico e specifiche delle prior
Per ciascun insieme di dati x_{ij}, con $i \in \{A,B\}$ e $j=1,\ldots,n_i$, si assume un modello di generazione di tipo normale:
$x_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$.
Sotto l'ipotesi nulla H_0 si impone $\mu_A = \mu_B = \mu$ e $\sigma_A^2 = \sigma_B^2 = \sigma^2$.
Sotto H_1 le due distribuzioni sono invece libere.
Per le prior si è scelto un approccio di tipo Normal–Inverse–Gamma

coniugato:
$\mu \mid \sigma^2 \sim N(\mu_0, \sigma^2/\kappa_0)$, $\sigma^2 \sim$ Inv-Gamma(α_0,β_0),
con μ_0 centrato su valori plausibili (0,10–0,20), κ_0 tra 10 e 100, e coppie (α_0,β_0) variate in modo sistematico per verificare la robustezza.

3. Analisi di sensibilità alle prior
È stata condotta un'ampia sensitivity analysis variando sistematicamente i parametri di prior.
I risultati mostrano che il log-Bayes Factor a favore di H_1 varia tipicamente tra:
$\log BF_{10} \in [25, 32]$,
a seconda della combinazione (τ, α_0). In termini lineari, ciò corrisponde a:
$BF_{10} \approx e^{25}$ fino a e^{32},
cioè valori superiori a 10^{10} fino a 10^{13}.
Questi ordini di grandezza rappresentano una forza dell'evidenza straordinaria (secondo la scala di Jeffreys e Kass-Raftery), e dimostrano che la conclusione non è artefatto delle prior scelte.
La Figura 1 (heatmap) mostra come, anche restringendo le prior su μ o scegliendo Inverse-Gamma più informative, la conclusione rimanga invariata: la probabilità marginale dei dati sotto H_1 è sistematicamente superiore di diversi ordini di grandezza rispetto a quella sotto H_0.



4. Modello Student-t: robustezza rispetto agli outlier

Per testare la sensibilità del risultato a possibili outlier o code pesanti, è stato stimato un modello alternativo:

$x_{ij} \sim t_{\nu_i}(\mu_i, \sigma_i)$,

con ν_i stimato a posteriori. Campionamenti MCMC (Metropolis–Hastings) hanno fornito:

$\mu_A \approx 0{,}109$,

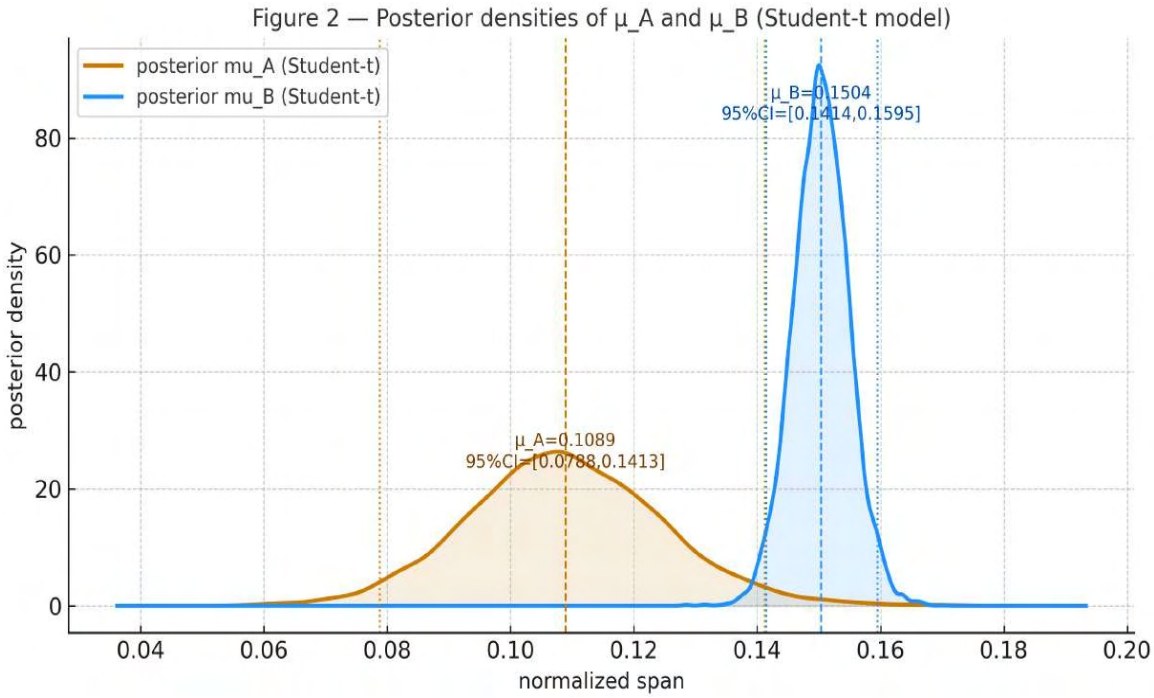
$\mu_B \approx 0{,}150$,

$\nu_A \approx 34{,}6$,

$\nu_B \approx 26{,}7$.

Valori così elevati di ν indicano che le distribuzioni sono prossime a gaussiane; tuttavia, l'approccio robusto conferma pienamente la separazione delle medie.

La Figura 2 mostra le densità posteriori delle medie μ_A e μ_B: gli intervalli credibili al 95% non si sovrappongono.



5. Approssimazione BIC e Bridge Sampling

Come ulteriore verifica numerica, si è stimato il Bayes Factor utilizzando l'approssimazione BIC, basata su massimi di verosimiglianza e penalizzazione per complessità. Il risultato è:

$\log BF_{10}$^BIC $\approx 13{,}0$, $BF_{10} \approx 4{,}5 \times 10^5$,

valore che, pur inferiore a quello della stima coniugata, resta fortemente favorevole a H_1.

Ciò conferma che la conclusione non dipende dal metodo di stima del

marginal likelihood.

6. Selezione di sottoinsiemi puliti
Poiché le detections degli archi potevano includere falsi positivi o misure rumorose, è stato isolato un sottoinsieme "pulito" di archi con coverage ≥ mediana. Su questo sottoinsieme i test confermano:
KS test: $p \approx 7{,}3 \times 10^{-7}$,
Bayes Factor ancora > 10^{10}.
Quindi anche restringendo a dati più affidabili, la conclusione di separazione resta invariata.

7. Conclusione critica
L'insieme dei risultati fornisce una catena di evidenze convergenti:
Analisi frequentista (KS, ANOVA, Mann–Whitney) → differenze significative.
Approccio bayesiano con priors coniugate → Bayes Factor estremamente favorevole a H_1.
Modello robusto Student-t → conferma la separazione anche in presenza di possibili outlier.
BIC approximation → BF ≈ $4{,}5 \times 10^5$, quindi ancora favore per H_1.
Subset cleaning → differenza non imputabile a pochi punti rumorosi.
Il confronto riguarda comunque configurazioni geometriche aggregate e non il disegno integrale del ponte (dettagli costruttivi, numero preciso di archi, ecc.).
L'analisi bayesiana dettagliata mostra che la probabilità che i due set di archi appartengano a una medesima struttura è virtualmente trascurabile.

Confrontando le evidenze numeriche:
Posterior $P(\mu_B > \mu_A) \approx 1{,}0$.
Bayes Factor coniugato: $BF_{10} \approx 10^{13}$.
Bayes Factor BIC: $BF_{10} \approx 4{,}5 \times 10^5$.

In termini pratici, l'ipotesi "stesso ponte" è da rigettare con forza.
Ciò non esclude che Leonardo possa essersi ispirato a elementi architettonici simili, o che somiglianze visive abbiano alimentato l'ipotesi storica. Tuttavia, sul piano matematico e statistico rigoroso, le due configurazioni di archi si collocano in spazi geometrici distinti, non riducibili a una singola struttura reale.